Геометрические задачи
(часть 2)

Армеева Е.В.,
методист кафедры ЕНМО АО ИОО,
учитель математики МБОУ СШ № 14 г. Архангельска

Трудности решения геометрических задач

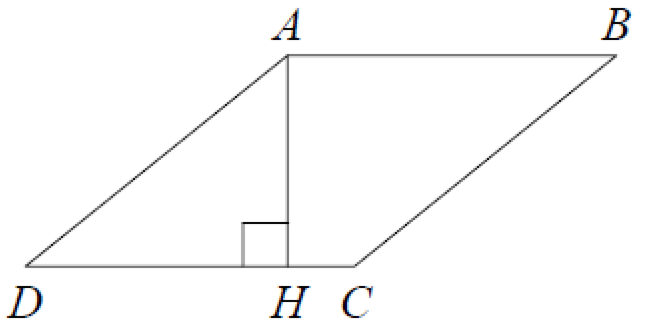
- Неалгоритмичность задач
- Необходимость выбора метода решения задачи и теоремы для решения конкретной задачи (нескольких теорем) из большого набора известных фактов
- Нужно решить довольно много задач, чтобы научиться их решать.

ОГЭ

№	Основные проверяемые требования к математической подготовке	Коды проверяемых элементов содержания	Коды разделов проверяемых требований	Уровень сложности	Максимальный балл за выполнение задания
23	Умение применять формулы периметра и площади многоугольников, длины окружности и площади круга, объёма прямоугольного параллелепипеда; умение применять признаки равенства треугольников, теорему о сумме углов треугольника, теорему Пифагора, тригонометрические соотношения для вычисления длин, расстояний, площадей	7	11	П	2
24	Умение оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, доказательство; распознавать истинные и ложные высказывания, приводить примеры и контрпримеры, строить высказывания и отрицания высказываний	7	2, 11	П	2
25	Умение применять формулы периметра и площади многоугольников, длины окружности и площади круга, объёма прямоугольного параллелепипеда; умение применять признаки равенства треугольников, теорему о сумме углов треугольника, теорему Пифагора, тригонометрические соотношения для вычисления длин, расстояний, площадей	7	11	В	2

Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Решение.



$ABCD$ — ромб, поэтому $AD = DC = DH + HC = 29$. Из треугольника ADH находим:

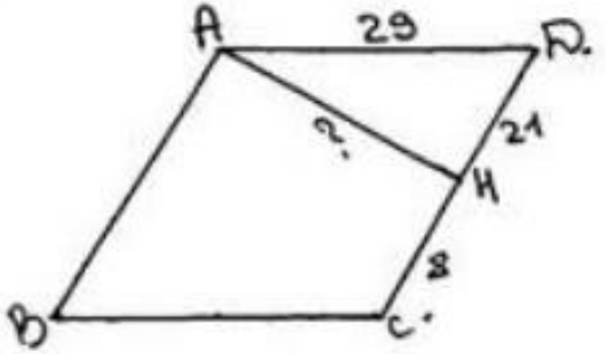
$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = 20.$$

Ответ: 20.

Критерии оценивания выполнения задания 23

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

задание 23



Дано: ABCD – ромб

AH – высота

CH = 8

DH = 21

Найти: h_{ABCD}

Решение:

1) DC = AD = AB = BC = 29 (т.к. у ромба все стороны равны)

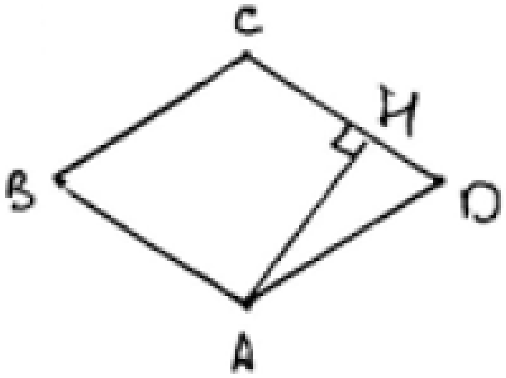
2) △ADH. По Т. Пифагора:

$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{841 - 441} = \sqrt{400} = 20$

Ответ: 20 см

Комментарий. Решение полное и верное.

Оценка 2 балла.



Дано:

ABCD – ромб

AH – высота

CH = 2

DH = 24

AH – ?

Решение:

1) т.к. ромб стороны равны CD = AD = CH + DH

AD = 26

2) $AH = \sqrt{AD^2 - DH^2}$ (по th Пифагора на $\triangle AHD$)

$AH = \sqrt{676 - 576} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

Отв: $10\sqrt{2}$

Комментарий. Вычислительная ошибка при нахождении разности под знаком корня.

Оценка 1 балл.

23.

Дано:

ABCD – ромб

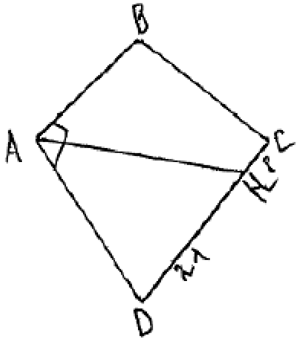
AH – высота

DH = 21

CH = 8

Найти:

AH – ?



Решение:

~~По свойству высоты, опущенной из прямого угла:~~

~~∠A прямой ⇒ AH =~~

1) $AD = DH + HC = 21 + 8 = 29$ (по свойству 2-ух пропорциональных сторон).

Рассмотрим $\triangle ADH$:

~~△~~ $\angle H$ – прямой ⇒ $\triangle ADH$ – прямоугольный

По теореме Пифагора:

$AH^2 = AD^2 - DH^2$

$AH = \sqrt{841 - 441} = \sqrt{400} = 20$

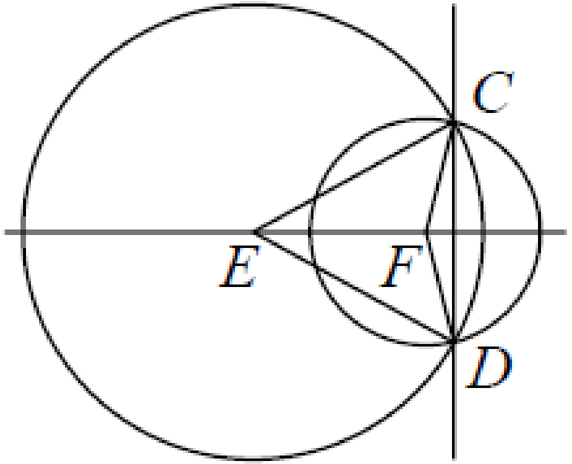
Ответ: $AH = 20$

Комментарий. Ответ верный, однако, решение содержит геометрическую ошибку: сторона AD не складывается из отрезков DH и HC. Рисунок не соответствует решению.

Оценка 0 баллов.

Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.

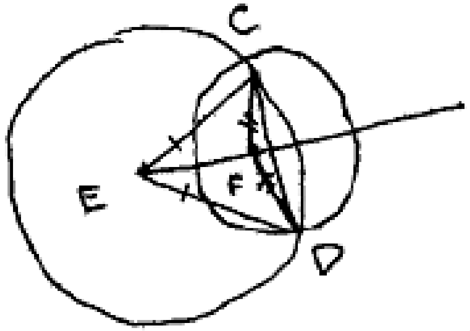
Доказательство. Точка E равноудалена от точек C и D, поэтому эта точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CD. Аналогично, точка F лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CD. Значит, прямая EF является серединным перпендикуляром к отрезку CD.



Критерии оценивания выполнения задания 24

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

24.



Дано: CD - прямая, (·)C и (·)D - пересечение двух окружностей

Доказать: $CD \perp EF$

Доказательство.

1) EC = ED - радиусы

FC = FD - радиусы

2) (·)E и (·)F равноудалены от концов отрезков CD

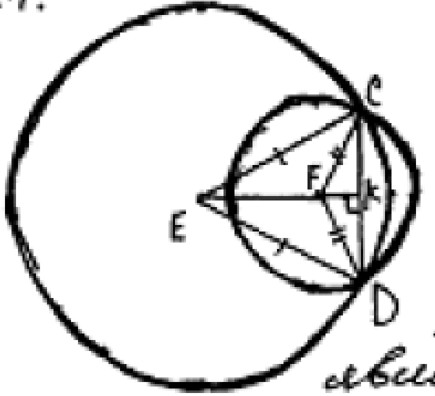
=> EF - срединный перпендикуляр => $CD \perp EF$

ч.т.д.

Комментарий. Доказательство понятное, полное и верное.

Оценка 2 балла.

24. Дано: две окружности с центрами E и F, пересекающиеся в точках C и D.
Доказать: $CD \perp EF$



Доказательство: пусть K центр CD.
Рассмотрим $\triangle ECD$:
$EC = ED$, как радиусы окружности, тогда $\triangle ECD$ – равнобедренный, отсюда медиана EK будет являться высотой.
Рассмотрим $\triangle CFD$:
$FC = FD$, как радиусы окружности, тогда $\triangle CFD$ - равнобедренный, и медиана FK будет являться высотой.
, следовательно,
Высоты EK и FK пересекают точку K под прямым углом и опираются на одну дугу. Т.е. EK и FK совпадают и являются перпендикулярами к стороне CD и, следовательно $EF \perp CD$. Что и требовалось доказать.

Комментарий. В последнем абзаце содержатся лишенные смысла утверждения «высоты пересекают точку под прямым углом», «высоты опираются на одну дугу». Имеется в виду, что оба отрезка EF и FK перпендикулярны CD, и это доказано выше. Поскольку рассуждение, в целом, понятное и верное, эти недостатки можно отнести к несущественным неточностям.

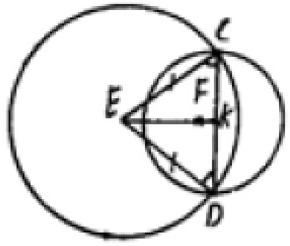
Оценка 1 балл.

Дано:

окр (E); окр (F)

окр $(E) \cap$ окр $(F) = C$ и D

Док-ть: $CD \perp EF$



~~Решение~~ Доказательство

Проведём EC и ED — радиусы, тогда $EC = ED$.

$\triangle ECD$ - равнобедренный, т.к $EC = ED$ (как радиусы) $\Rightarrow \angle EDC = \angle ECD$,

$CK = KD \Rightarrow \triangle EKC = \triangle EKD$ (по 2 сторонам и углу между ними).

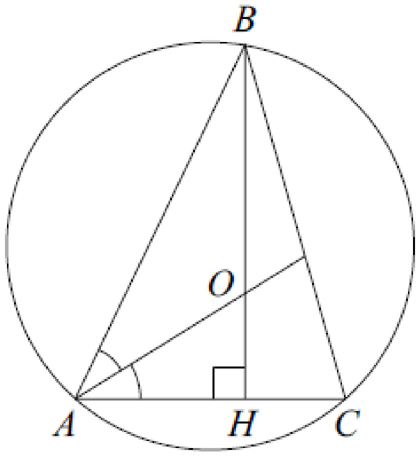
Тогда $\angle CEK = \angle DEK \Rightarrow EK$-биссектриса $\angle CED$. В равнобедренном треугольнике биссектриса, выпущенная из вершины, является медианой и высотой $\Rightarrow EF \perp CD$ ч.т.д.

Комментарий. Не доказано, что $CK = KD$, не доказано, что точка F лежит на высоте EK. Без этого рассуждение не является достаточным.

Оценка 0 баллов.

В треугольнике ABC биссектриса угла A, делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $25:24$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC=14$.

Решение. Пусть биссектриса, проведенная из угла A, пересекает высоту BH в точке O (см. рис.). Пользуясь свойством биссектрисы, из треугольника ABH находим:



$$\frac{BA}{AH}=\frac{BO}{OH}=\frac{25}{24}.$$

Следовательно,

$$\cos A=\frac{AH}{AB}=\frac{24}{25}.$$

Тогда

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2}=\frac{7}{25}.$$

По теореме синусов из треугольника ABC находим:

$$\frac{BC}{2\sin A}=\frac{14\cdot 25}{2\cdot 7}=25.$$

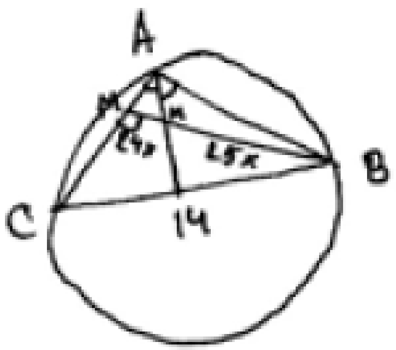
Ответ: 25.

Критерии оценивания выполнения задания 25

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Дано:
AH – биссектриса
$\frac{HM}{BH} = \frac{24}{25}$
$BC = 14$

Найти:
R



Решение:
AH – биссектриса (по условию)

$\Downarrow$

$\frac{AM}{AB} = \frac{MH}{BH} = \frac{24}{25}$

Пусть $AM = 24y$, тогда
$AB = 25y$

$\Downarrow$

$MB = 7y$ (по теореме Пифагора)

$\Downarrow$

$\sin\angle A = \frac{7}{25}$

$2R = \frac{CB}{\sin\angle A} = \frac{14}{\frac{7}{25}} = 50$

$\Downarrow$

$R = 25$

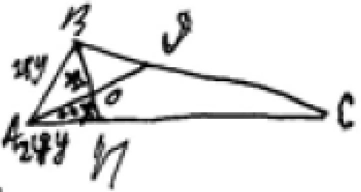
Ответ: 25.

Комментарий. Решение полное и верное.

Оценка 2 балла.

Дано:
$\triangle ABC$
BH – высота
AD – биссектриса
$BC = 14$
$BO : OH = 25x : 24x$

R – ?



Решение:

1) $\frac{AB}{AH} = \frac{BO}{OH} = \frac{24(y)}{25(y)}$ – свойство биссектрисы в $\triangle ABH$

2) $\triangle ABH$ – прямоугольный $\Rightarrow$
$\cancel{25y^2} = AB^2 = AH^2 + BH^2$ (Пифагор) $\Rightarrow$
$25y^2 = 24y^2 + (49x)^2 \Rightarrow 1y^2 = (49x)^2 \Rightarrow y^2 = 49x^2$
$\Rightarrow y = 7x$

3) $\sin\angle BAH$ в $\triangle BAH = \frac{BH}{AB} = \frac{49x}{25y} =$
$= \frac{\cancel{49x}\,7}{7x\cdot 25} = \frac{7}{25}$

4) $2R = \frac{BC}{\sin A}$ (следствие из теоремы синусов) $\Rightarrow$
$2R = \frac{14}{\frac{7}{25}} \Rightarrow 2R = 50 \Rightarrow R = 100$ Ответ: $R = 100$

Комментарий. Ход решения понятен, все шаги присутствуют, но допущена математическая ошибка: при возведении в квадрат выражений $25y$ и $24y$ коэффициенты остались без изменения.

Оценка 0 баллов.

ЕГЭ по математике
(профильный уровень)

Номер задания	Проверяемые предметные результаты освоения основной образовательной программы	Коды проверяемых требований (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на базовом уровне (в мин.)	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на профильном уровне (в мин.)
14	Умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, отрезок, луч, величина угла, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; площадь фигуры, объём фигуры, многогранник, поверхность вращения, площадь поверхности, сечение; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения; использовать геометрические отношения при решении задач; находить и вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объём, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии	9, 10, 11	7	П	3	40	20

Номер задания	Проверяемые предметные результаты освоения основной образовательной программы	Коды проверяемых требований (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на базовом уровне (в мин.)	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на профильном уровне (в мин.)
17	Умение оперировать понятиями: точка, прямая, отрезок, луч, величина угла; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии, использовать геометрические отношения при решении задач; умение находить и вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь), используя изученные формулы и методы	9, 11	7	П	3	–	35

Задания 14, 17
профильного ЕГЭ по математике состоят из двух пунктов.

Пункт (а)
– доказательство какого-либо утверждения

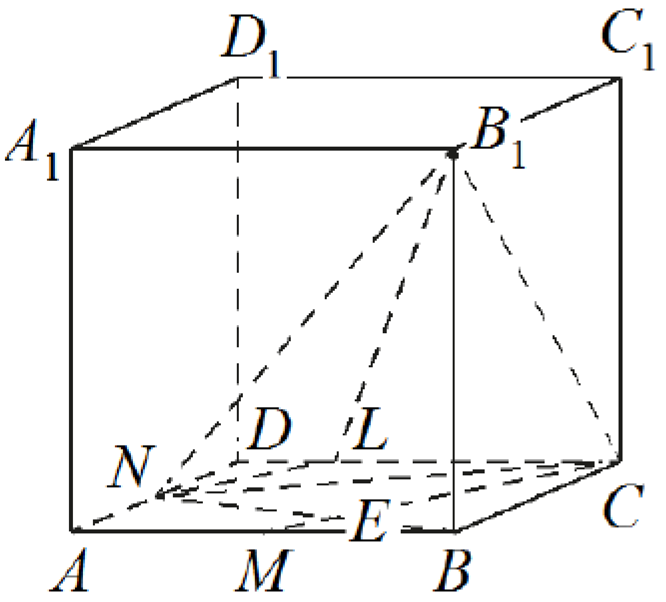
Пункт (б)
– вычисление какой-либо величины

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $B_1N = 6$.

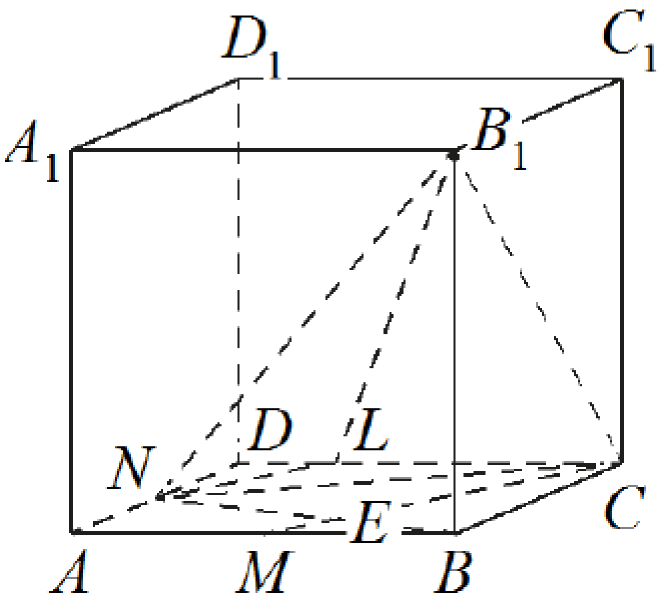


а) Пусть отрезки NB и MC пересекаются в точке E. Прямоугольные треугольники NAB и MBC равны по двум катетам, значит,

$$\angle MEB = 180^\circ - (\angle EMB + \angle EBM) =$$

$$= 180^\circ - (\angle EMB + \angle MCB) = 90^\circ.$$

Отрезок BN — проекция отрезка NB_1 на плоскость ABC. Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах прямые B_1N и CM перпендикулярны.



б) Пусть плоскость α пересекает ребро CD в точке L. Прямые NL и CM, лежащие в плоскости ABC, параллельны, поскольку прямая NL лежит в плоскости α, параллельной прямой CM. Следовательно, $\angle DLN = \angle DCM = \angle BMC$, а значит, прямоугольные треугольники DLN и BMC подобны по острому углу. Получаем:

$$DL = BM \cdot \frac{DN}{BC} = \frac{AB}{2} \cdot \frac{AD}{2BC} = \frac{CD}{4}.$$

Заметим, что $\angle LNB_1 = 90°$, поскольку прямая B_1N перпендикулярна прямой NL, параллельной прямой CM. Пусть ребро куба равно a. Получаем:

$$36 = B_1N^2 = AN^2 + AB^2 + BB_1^2 = \frac{9a^2}{4},$$

откуда

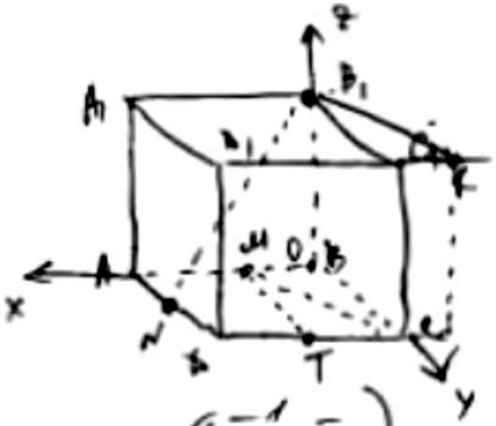
$$a = 4;\ BB_1 = a = 4,\ DN = 2,\ CL = 3,\ LN = \frac{a\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}.$$

Объём пирамиды $CNLB_1$ равен $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} CL \cdot DN\right) \cdot BB_1 = 4$.

С другой стороны, объём этой пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} NB_1 \cdot LN\right) \cdot x = x\sqrt{5}$,

где x — расстояние от точки C до плоскости α. Из равенства $x\sqrt{5} = 4$ получаем $x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.



а) Введем ПСК охуz, направив Ох по ВА, Оy по ВС, Оz по BB_1

Пусть сторона куба = a, тогда

М – середина АВ по усл

$B_1(0;0;a)$ $N(a;\frac{a}{2};0)$ $C(0;a;0)$ $M(\frac{a}{2};0;0)$

$\overline{B_1N}(a;\frac{a}{2};-a)$ $\overline{CM}(\frac{a}{2};-a;0)$

$\cos(\overline{B_1N};\overline{CM}) = \dfrac{\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}+a^2}\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}} = 0 \Rightarrow \angle(\overline{B_1N};\overline{CM}) = 90° \Rightarrow B_1N \perp CM$ ч.т.д.

б) Т.к. плоскость $\alpha \parallel CM$, проведем $B_1K \parallel CM$, тогда плоскость $\alpha = (B_1NK)$

$B_1C_1 = MT$, (Т – сер DC), $\angle B_1C_1K = \angle MTC = 90$, $B_1K \parallel MC$, $MT \parallel B_1C_1$ $\Downarrow$ $\triangle B_1C_1K = \triangle CMT$ по стороне и 2м прилеж углам

$\Rightarrow K(-\frac{a}{2};a;a)$, пусть $\bar{n}$ – нормаль α.

$B_1N = 6$ $\quad B_1N = \sqrt{(a-0)^2+(\frac{a}{2}-0)^2+(0-a)^2} = \sqrt{2a^2+\frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2} = 6$ $\quad a = 4$

$\rho(C;\alpha) = \left|\dfrac{\overline{CB_1}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}\right|$ пусть $\bar{n}(x;y;z)$, тогда

$\overline{B_1N}(4;2;-4)$

$\overline{B_1K}(-2;4;0)$

$\begin{cases} 4x+2y-4z=0 \\ -2x+4y=0 \end{cases}$ Пусть $x=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}; z=\frac{5}{4}$

$\bar{n}(1;\frac{1}{2};\frac{5}{4})$

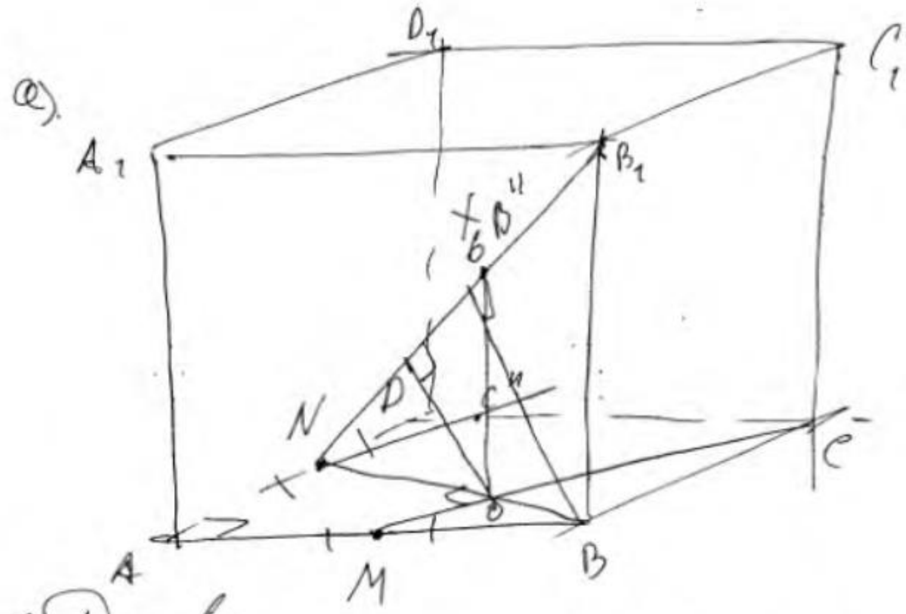
$\overline{CB_1}(0;-4;4)$ $\quad \rho(C;\alpha) = \left|\dfrac{-4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{5}{4}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{25}{16}}}\right| = \left|\dfrac{3}{\sqrt{\frac{45}{16}}}\right| = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Ответ: б) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Комментарий.

Верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.

Оценка эксперта: 3 балла.



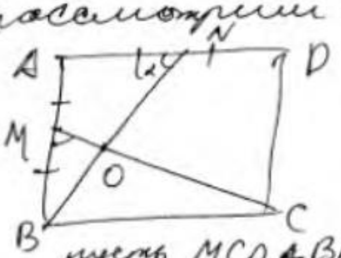
а). Док-во.

проведем проекцию NB_1 на $(ABCD)$

чтобы $NB_1 \perp$ было (М необходимо по

теореме о 3х $\perp$ чтобы $NB \perp MC$.

рассмотрим квадрат $ABCD$



пусть $MC \cap BN = O$

пусть $\angle BMC = \alpha$, тогда т.к. $\triangle ABN = \triangle BMC$, $\angle ANB = \angle BMC$

тогда $\angle AMO = 180° - \alpha$.

т.к. $\angle AMO + \angle ANO = 180° \Rightarrow$ вокруг четырех. $NOMA$

можно опис. окр $\Rightarrow \angle MAN + \angle MON = 90° \Rightarrow \angle MON = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow MC \perp BN \Rightarrow$ по теореме о 3х $\perp$ $NB_1 \perp MC$.

б) $B_1N = 6$

пусть ребро и сторона куба $= 2a$, тогда $NB^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$, а $NB_1^2 = 5a^2 + 4a^2 = 9a^2 \Rightarrow 36 = 9a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 4$

т.к. $(\alpha) \parallel CM$ и содержит $NB_1 \perp MC \Rightarrow (\alpha) \perp CM$, тогда

расстояние от C до (α) = расст от точки O до

NB_1 и пусть оно равняется h.

проведем XB — высоту в $\triangle NBB_1$, проведем $B''O - \perp$

Рассмотрим 2$\triangle$, $NB''O$ и NB_1B, они подобны по

2м $\angle$, т.к. $\angle NB''O = \angle NB_1B$ и $\angle NOB'' = \angle NBB_1$

тогда $\frac{h}{XB} = \frac{NO}{NB}$

$NB = \cancel{\sqrt{20}}\ \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

$NO = NB - OB$

$OB = \frac{MB \cdot BC}{MC} = \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{20}} = \frac{8}{\sqrt{20}}$; $NO = \frac{\sqrt{20}}{1} - \frac{8\sqrt{20}}{20} = \frac{3\sqrt{20}}{5}$

$XB = \frac{NB \cdot B_1B}{NB_1} = \frac{\sqrt{20} \cdot 4}{6} = \frac{2\sqrt{20}}{3}$

тогда

$\frac{3h}{2\sqrt{20}} = \frac{3\sqrt{20}}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{3}{5} \Rightarrow 3h = \frac{2\sqrt{20} \cdot 3}{5} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

Комментарий.

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*.

При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ не из-за арифметической ошибки – длина ребра куба найдена неверно.

Оценка эксперта: 1 балл.

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

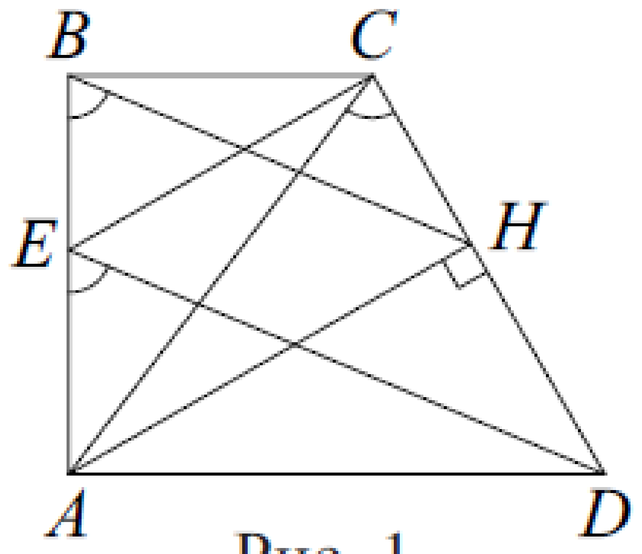


Рис. 1

Решение.

а) Поскольку

$$\angle ABC = \angle AHC = \angle ECD = \angle EAD = 90°,$$

около четырёхугольников $ABCH$ и $AECD$ можно описать окружности (рис. 1).

Значит,

$$\angle ABH = \angle ACH = \angle ACD = \angle AED,$$

то есть прямые BH и ED параллельны.

б) Опустим из точки B перпендикуляр BK на прямую CD (рис. 2). Стороны KH и CD треугольников BKH и ECD лежат на одной прямой, а стороны BK и EC, BH и ED попарно параллельны. Значит, треугольники BKH и ECD подобны.

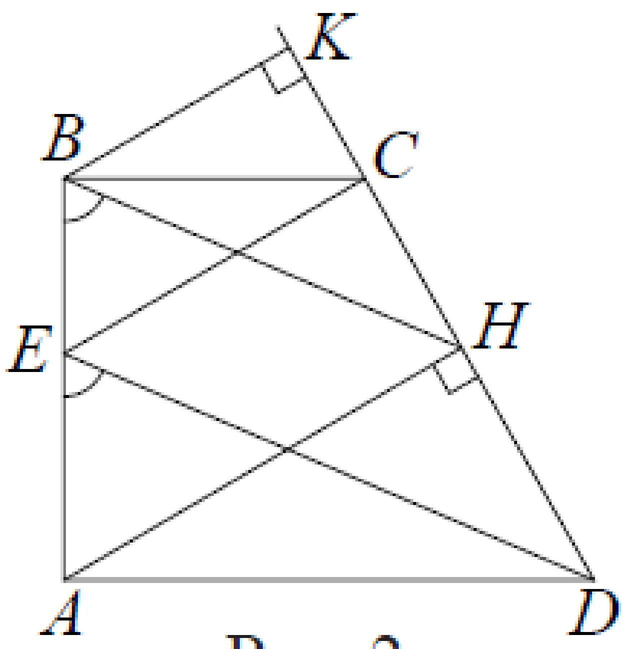


Рис. 2

Поскольку

$$BK = BC \cdot \sin\angle BCK = EC \cdot \cos\angle ECB \cdot \sin\angle BCK =$$

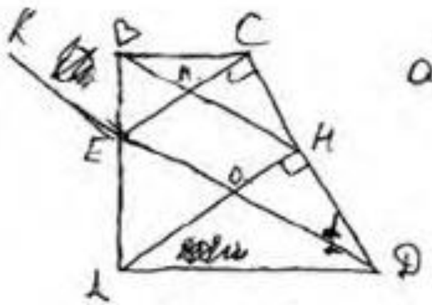
$$= EC \cdot \cos 30° \cdot \sin 60° = \frac{3}{4} EC,$$

коэффициент подобия равен $\frac{3}{4}$. Значит,

$$BH : ED = 3 : 4.$$

Ответ: б) $3:4$.

№10.



а) ~~Пусть ∠ADC = ..., тогда~~

~~$\angle HKD = 180° - \angle$~~

~~$\angle HO$~~

Пусть $\angle ODH = \angle$, тогда:

$\angle HOD = 90° - \angle$; $\angle AOE = 90° - \angle$ ($\angle AOE = \angle HOD$ как верт.)

$\angle EOH + \angle HOD = 180° \Rightarrow \angle EOH = 90° + \angle$

$\angle ECA = \angle MEO$ (как Н.Л.У.) при $CE \parallel AH$ и се

$\Rightarrow \angle MEO = 90° - \angle$ $\quad \angle KEM = 180° - \angle MEO = 90° +$

$\angle KEM = \angle BMC$ (как соотв.) $\Rightarrow \angle EMH = \angle B$

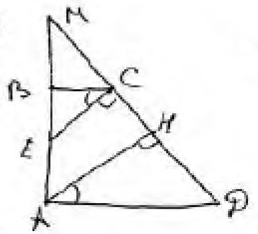
$\Rightarrow \angle OHM = 360° - (90° + \angle) - (90° + \angle) - (90° - \angle) = 9$

~~$\angle CMH = 90° - \angle = 180° - \angle BMC = 90° - \angle$~~

~~$\angle CHM = \angle OHM \Rightarrow$~~ $\angle KEM = \angle EOH \Rightarrow EC$

(т.к. равны соотв. углы) ч.т.д

б)



$\angle BCD = 120°$.

~~$\angle ECD = 90° \Rightarrow \angle BCE = 30°$~~

$\angle BCE = \angle BCD - \angle ECD = 30°$.

$\angle BCE = \angle HAD$

т.к. $CE \parallel AH$ и $BC \parallel AD$. (аналог

Н.Л.У.) $\Rightarrow \angle HAD = 30° \Rightarrow HD = \frac{1}{2} AD$.

$\angle ADH = 60° \Rightarrow \angle AMD = 30° \Rightarrow AD = \frac{1}{2} MD$

$MD = 2AD = MH + HD = MH + 0{,}5AD \Rightarrow$

$\Rightarrow MH = 1{,}5AD$ и $\triangle MBH \sim \triangle MED$ (по 2 угл.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BH}{ED} = \frac{MH}{MD} = \frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{3}{4}$

Комментарий.

В данном решении есть попытка доказательства утверждения пункта *а*. Логическая ошибка содержится в записи $\angle KEM = \angle BMC$ – это возможно только при параллельности прямых BH и ED, а как раз это и требовалось доказать. Верный ответ в пункте *б* получен обоснованно с использованием недоказанного утверждения пункта *а*.

Оценка эксперта: 1 балл.

Дано:

$ABCD$ – трапеция

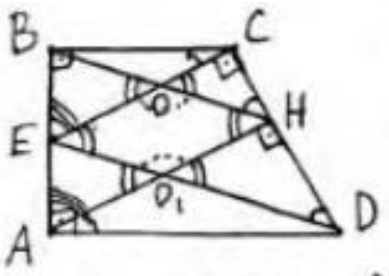
$BC \perp AB \perp AD$

$AH \perp CD$

$CE \perp CD$

а) Доказать:

$BH \parallel ED$



Доказательство:

1) т.к. $AH \perp CD$ и $CE \perp CD$, то $AH \parallel CE$;

2) AB – секущая при двух $\parallel$ прямых, значит $\angle BEC = \angle BAH$; 3) BH – тоже секущая, значит $\angle BOE = \angle COH = \angle BHA$;

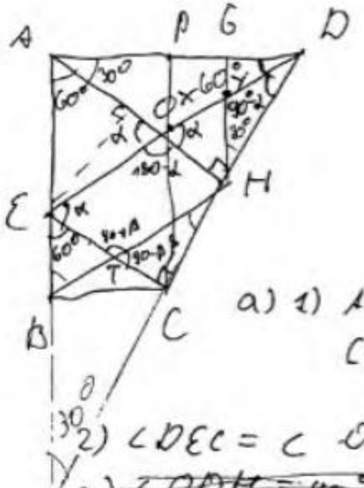
4) ED – тоже секущая, значит $\angle CED = \angle EO_1A = \angle HO_1D$;

5) $\angle EOH = 180^\circ - \angle COH$ (смеж. углы), $\angle EO_1H = 180^\circ - \angle BHA$. т.к. $\angle COH = \angle BHA$, то $\angle EOH = \angle EO_1H$, следовательно, $EOHO_1$ – параллелограм, а его противолежащие стороны = и $\parallel$, значит, $BH \parallel ED$.

Комментарий.

Имеется попытка доказательства утверждения пункта *а*. Логическая ошибка содержится в записи 5) – при вычислении угла EO_1H: $\angle EO_1H = 180^\circ - \angle EO_1A$. Замена угла $\angle EO_1A$ углом $\angle BHA$ возможна только при условии параллельности прямых BH и ED, а как раз это и требовалось доказать.

Оценка эксперта: 0 баллов.



Дано: $AH \perp CD$ $\angle BCD = 120^\circ$

$CE \perp CD$ и $CE \cap AB = E$

а) Д-ть: $BH \parallel EO$

б) $\frac{BH}{EO}$ – ?

а) 1) $\left.\begin{matrix} AH \perp CD \\ CE \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ по т. о перп. прямых $AH \parallel EC$

2) $\angle DEC = \angle DOH = \alpha$ как соотв.

~~3) $\angle ODH = 90^\circ - \alpha$~~

4) Пусть $AB = x$ $AH = y$ ~~5) $\triangle BET \sim$ по~~

5) $\triangle BET \sim \triangle BAH$ по 2-м углам ($\angle ABH$ – общий, $\angle BET = \angle BAH$ как соотв.) k – коэффициент подобия

6) $AE = AB - BE = AB - kAB = x(1-k)$

$AO = AH - OH = AH - kAH = y(1-k)$

7) $\triangle AEO \sim \triangle ABH$ по углу и 2-м сторонам

($\angle A$ – общий; $\frac{AO}{AH} = 1-k$ и $\frac{AE}{AB} = 1-k$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AEO = \angle ABH$

8) ~~$EO \parallel BH$~~ т.к. $\angle AEO = \angle ABH$, то по признаку параллельности прямых (прямые парал., если соотв. углы равны) $EO \parallel BH$ ч. т. д.

Комментарий.

Логическая ошибка: доказательство утверждения пункта *а* опирается на дополнительное условие из пункта *б*.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Причины ошибок в решении геометрических задач

- Незнание и/или непонимание аксиом, определений, теорем
- Неумение их применять
- Невнимательное чтение условия и вопроса задания
- Вычислительные ошибки
- Нарушения логики в рассуждениях
- Принятие ошибочных гипотез
- Недостатки в работе с рисунком

Необходимые условия успеха при решении задач по геометрии

- Уверенное владение основными понятиями и их свойствами (определения, аксиомы, теоремы, базовые задачи)
- Знание основных методов и приёмов решения задач
- Умение комбинировать методы и приёмы решения задач
- Наличие опыта решения задач

Спасибо за внимание!